

12 の解説

$\{\log_{2024} 2^n\} = \log_{2024} 253$ となるきを仮定すると,

$\log_{2024} 2^n = m + \log_{2024} 253$ となる整数 m が存在することになるが,

このとき, $2^n = 2024^m \cdot 253$ より, 明らかに矛盾.

よって $\log_{2024} 253 \leq \{\log_{2024} 2^n\} < \log_{2024} 256$ である n を数えればよく,

これは 2024 進法において 2^n の最高位の数字が 253 以上 255 以下となる n の個数に等しい.

ここで, 2024 進法における 2^n の最高位の数字のふるまいについて考察する.

2^k が m 桁で最高位 1 であったとして次に位が繰り上がるものを考える.

$2024^{m-1} \leq 2^k < 2 \cdot 2024^{m-1}$ であって,

$i = 1, 2, \dots, 9$ に対して, $2 \cdot 2024^{m-1} \leq 2^i \cdot 2024^{m-1} \leq 2^{k+i} < 2^{i+1} \cdot 2024^{m-1} < 2024^m$ である.

よって, 2^{k+i} は m 桁で最高位は 2^i 以上 $2^{i+1} - 1$ 以下である.

この事実を A と呼ぶことにする.

$1024 \cdot 2024^{m-1} < 2^{k+10} < 2048 \cdot 2024^{m-1}$ である.

$2024^m = 2024 \cdot 2024^{m-1} \leq 2^{k+10} < 2048 \cdot 2024^{m-1} < 2 \cdot 2024^m$ であるとき, 2^{k+10} は $(m+1)$ 桁で最高位 1,

$1024 \cdot 2024^{m-1} \leq 2^{k+10} < 2024 \cdot 2024^{m-1}$ であるとき, $2024^m < 2048 \cdot 2024^{m-1} \leq 2^{k+10} < 2 \cdot 2024^m$ であ

るので,

2^{k+11} は $(m+1)$ 桁で最高位 1 である.

よって, 2^k の位が 1 つ繰り上がる時 $2^{k+10}, 2^{k+11}$ のどちらかは最高位 1 である.

この事実を B と呼ぶことにする.

次に $i = 7$ であったときを考えると、事実 A より最高位は 128 以上 255 以下となる。

最高位が 128 以上 252 以下であったとき、 $128 \cdot 2024^{m-1} \leq 2^{k+7} < 252 \cdot 2024^{m-1}$ であるので、

$2024^m < 2048 \cdot 2024^{m-1} \leq 2^{k+11} < 4032 \cdot 2024^{m-1} < 2 \cdot 2024^m$ より次最高位 1 となるのは 2^{k+11} である。

最高位が 253 以上 255 以下であったとき、 $253 \cdot 2024^{m-1} \leq 2^{k+7} < 256 \cdot 2024^{m-1}$ であるので、

$2024^m = 2024 \cdot 2024^{m-1} \leq 2^{k+10} < 2048 \cdot 2024^{m-1} < 2 \cdot 2024^m$ より次最高位 1 となるのは 2^{k+10} である。

また、 $910498.57 < 10^7 \log_{2024} 2 < 910498.58$ であり、

$910498 < (10^7 - 6) \log_{2024} 2 < 910498.04 < 910498 + \log_{2024} 2$ であるから、

2^{10^7-6} は 2024 進法において 910499 桁で最高位が 1 である。

また、 $10^7 < (10^7 - 6) + 7$ であるから、 n が $10^7 - 6$ 以上 10^7 以下では条件を満たす n は存在しない。

よって 2^0 から 2^{10^7-6} まで 2 を掛けていくとき、繰り上がりは 910498 回起こる。

このことを踏まえ、事実 B において 2^{k+10} が最高位 1 となる繰り上がりの個数を求めればよい。

この個数を x 個とすると、 2^{k+11} が最高位 1 となる繰り上がりの個数は $(910498 - x)$ 個。

よって、 $10x + 11(910498 - x) = 10^7 - 6$ を解けばよく、 $x = 15484$ 。

したがって、求める個数は **15484** 個である。