7 の解説

2024 で割ると平方数となることから, 求める自然数は $2024n^2$(n は自然数) と書ける.

2024 を引くと平方数となることから, $2024n^2 - 2024 = 2024(n^2 - 1)$ は平方数.

$2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$ より, $n^2 - 1 = 506m^2$(m は自然数).

よって, ペル方程式 $n^2 - 506m^2 = 1$ つまり $(n + \sqrt{506}m)(n - \sqrt{506}m) = 1$ を解けばよい.

最小解は $(m, n) = (2, 45)$ であり, $(45 + 2\sqrt{506})(45 - 2\sqrt{506}) = 1$ である.

この両辺を 3 乗して, $(364365 + 16198\sqrt{506})(364365 - 16198\sqrt{506}) = 1$

よって,3 番目に小さい解は $(m, n) = (364365, 16198)$ である.

つまり求める答えは $\mathbf{2024 \cdot 364365^2}$ である.