9 の解説

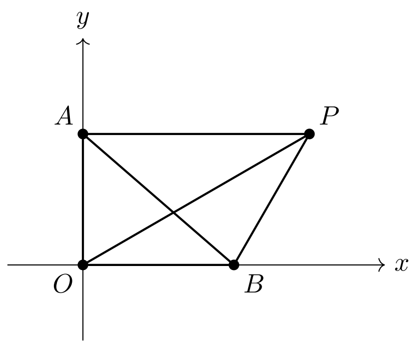
与式と $x, y, z > 0$ であることより, 余弦定理から,

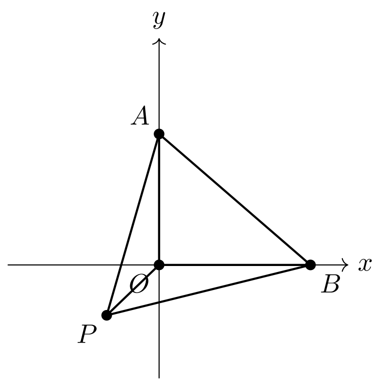
3 辺の長さが $x, y, \sqrt{3}$ である三角形で, 長さ $\sqrt{3}$ である辺の対角の大きさは $30°$,

3 辺の長さが $y, z, 2$ である三角形で, 長さ 2 である辺の対角の大きさは $30°$,

3 辺の長さが $z, x, \sqrt{7}$ である三角形で, 長さ $\sqrt{7}$ である辺の対角の大きさは $60°$,

これを踏まえると, 以下の 2 通りの図形が考えられる.





ただし, OA=$\sqrt{3}$, OB=2, AB=$\sqrt{7}$. AP=x, OP=y, BP=z, ∠OPA=∠OPB=$30°$ である.

まず左図の場合を考える.

P(X, Y) とおく.

また, 点 C$\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, D$(1, \sqrt{3})$ を考えると, △OAC, △OBD は正三角形である.

∠OPA=∠OPB=$30°$ より, 点 P は点 C を中心とする半径 $\sqrt{3}$ の円上, 点 D を中心とする半径 2 の円上に存在

する.

よって, $\begin{cases} \left(X - \dfrac{3}{2}\right)^2 + \left(Y - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 3 \\ (X-1)^2 + (Y - \sqrt{3})^2 = 4 \end{cases}$ である.

これを解いて, $X = 3, Y = \sqrt{3}$. つまり, P$(3, \sqrt{3})$ であるので,

x=AP=3, y=OP=$2\sqrt{3}$, z=BP=2 である.

右図についても同様にして, $\mathrm{P}\left(-\dfrac{9}{13}, -\dfrac{5\sqrt{3}}{13}\right)$ であるので,

x=AP=$\dfrac{9}{\sqrt{13}}$, y=OP=$\dfrac{2\sqrt{26}}{13}$, z=BP=$\dfrac{10}{\sqrt{13}}$ である.

よって解は $(x, y, z) = (3, 2\sqrt{3}, 2), \left(\dfrac{9}{\sqrt{13}}, \dfrac{2\sqrt{26}}{13}, \dfrac{10}{\sqrt{13}}\right)$.