第 3 回湖風祭コンテスト数学 (短答式)

3-9 姉崎樹 小坂唯木 , 2-9 阿部孝我 田上新之助

注意事項

・問題は 12 問各 1 点で, 概ね難易度の低い順に並べてあります.

・問題はすべて短答式であり, 解く過程を記述する必要はありません.

・開催期間は 7/5 問題公開時〜7/10 終日です. この期間中であれば解答の提出, 修正が可能です.

・解答は指定の Google フォームから行ってください.

・解答は計算式の形でも構いませんが, なるべく正誤判定のしやすい形で解答してください.

・問題を解く際に電卓は基本的な機能に限定して使用することができます. 高度な関数機能や描画ソフト, プログラミング等のツールの使用は禁じます.

・問題はおおよそ 1A2B3 の範囲で解くことができ, 数 3 を使用する問題は問 2 のみです.

・問題や解答方法などについて質問がある場合は kofusaicontest3@gmail.com にお寄せください.

・開催期間中, 問題に誤りが発覚した場合訂正を行う可能性があります.

・提出は 1 問からでも OK です. 奮ってご参加ください！

1. ${}_{2024}\mathrm{C}_{1012}\cdot{}_{1012}\mathrm{C}_{506}$ を割り切る最大の 500 以下の素数を求めよ.

2. 曲線 $\mathrm{C}: y=x^3-x^2$ 上の点 $\mathrm{P}(p,q)$ から, 傾き m の直線 l を引き, l と C の交点で P でないものの x 座標を $\alpha,\beta(\alpha<\beta)$ とする. このとき, $\displaystyle\lim_{m\to\infty}\frac{\beta}{\alpha}$ を求めよ.

3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{900}\frac{2k}{k^4+29k^2+225}$ を求めよ.

4. $\angle\mathrm{C}=90^\circ$ である直角三角形 ABC について, 辺 AC, AB の中点をそれぞれ M, N とする.
△ABC の外接円を O, 内接円を P とし, 点 M で辺 AC と接し円 O と点 B の逆側で接する円を Q, 点 N で辺 AB と接し円 O と点 C の逆側で接する円を R とする.
円 P,Q の半径の長さがそれぞれ 52,31 のとき, 円 R の半径の長さを求めよ.

5. $\begin{cases} a^3+b^3+c^3=119378 \\ abc=4410 \end{cases}$ を満たす自然数 $(a,b,c)(a>b>c)$ を求めよ.

6. $\dfrac{3554}{1131}<\dfrac{m}{n}<\dfrac{22}{7}$ を満たす自然数 (m,n) であって, n が最小となるものを求めよ.

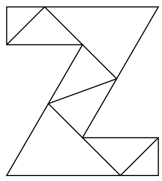
7. 2024 を引いても, 2024 で割っても 0 でない平方数となる自然数であって, 3 番目に小さいものを求めよ.
ただし, 条件を満たす自然数で 10^{11} 以上 10^{18} 未満のものは求めるものただ 1 つである.

8. 6×6 のマス目があり, このマス目の中で 2×2 のマス, 2×1 または 1×2 のマス, 1×1 マスの 3 箇所を重ならないように選び, それぞれ赤, 青, 黄に塗る. 6×6 のマス目と同じ大きさの透明な板を用意し, 回転や裏返しを施したのち正方形にはみ出さないように重ね, 色が塗られているマスの部分だけ板に黒で色を塗る操作を考える. この操作を繰り返すことで, 板のマスはすべて黒となった.
このときはじめのマスの塗り方は何通りか. ただし, 回転や裏返しで重なるものも異なるものとして数える.

9. $x,y,z>0$ のとき, $\begin{cases} x^2+y^2-\sqrt{3}xy=3 \\ y^2+z^2-\sqrt{3}yz=4 \\ z^2+x^2-zx=7 \end{cases}$ を解け.

10. 天秤があり, 左の皿には質量 325, 331, 337, 343, 349, 355, 361, 367 の 8 つの分銅が, 右の皿には質量 326, 332, 338, 344, 350, 356, 362, 368 の 8 つの分銅がそれぞれ 1 つずつ置かれている.
各時点で下に傾いている皿から 1 つの分銅を取り除くという操作を繰り返していき, 初めて左右の皿が釣り合ったときにすべての分銅が取り除かれているような取り除き方は何通りか.

11. 下図を一筆書きする方法は何通りか.



12. $1-3\log_{2024}2<\{n\log_{2024}2\}<8\log_{2024}2$ を満たす 10^7 以下の自然数 n の個数を求めよ.
ただし $\{x\}$ で x の小数部分を表すこととする. つまり, $m\leq x<m+1$ を満たす整数 m を用いると, $\{x\}=x-m$ である. また, $0.091049857<\log_{2024}2<0.091049858$ である.

表 1　各設問の作問者

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
阿部	田上	阿部	阿部	姉崎	小坂	小坂	阿部	小坂	阿部	阿部	小坂