第 2 回湖風祭コンテスト

湖風祭コンテスト委員会

後援 : ZMC(膳所高校数学研究会)

注意事項

・開催期間は 7/6～7/11 であり、7/11 24:00 まで解答を受け付けます.

・問題は全 12 問で概ね難易度の低い順に並んでいます.

・問題はすべて短答式であり,解く過程を記述する必要はありません.

・解答等は 4 ページの QR コードから Google フォームで行います.

・解答は適宜修正や追加が可能です.一問からでも是非提出してみて下さい.

・1 問につき 1 点の 12 点満点で,後日結果を通達します.成績優秀者には景品を贈呈する予定です.

・おおよそ数学 1A,数学 2 までの知識で解くことができます.

・計算は本質ではないので問題を解く際の電卓の使用は認めます.

・問題や解答方法,その他に関して質問がある場合は kofusaicontest2@gmail.com にお問い合わせください.

1.　ある自然数 x について, x を 2,3,5,7,11 で割った余りがそれぞれ,1,1,2,3,5 であるとき,
x としてありうる数のうち最小のものを求めよ.

2.　斜辺が 10，高さが 6 の直角三角形について，これらの数字が 10 進法で表されているので,
この三角形は存在しない．しかし, n を自然数として, n 進法であれば三角形ができる.
斜辺が 10(n)，高さが 6(n)となる直角三角形が存在する最小の n を求め，そのときの面積を n 進法で求めよ.

3.　$\sum_{k=1}^{100}\{(\sum_{i=1}^{k} i)(\sum_{i=1}^{k} i^2)\}$　を求めよ.

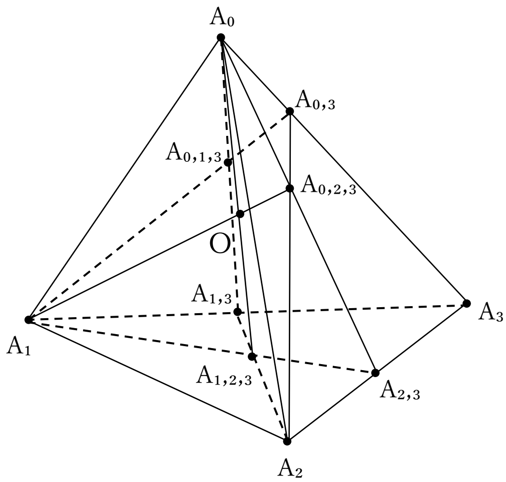
4.　$a\,,b$ を実数とする．$a^3+15a+b^3+15b=5a^2+5b^2+4ab+18$ のとき，$a+b$ を求めよ.

5.　$\sum_{k=1}^{2023}(-1)^k(4047+2k)\,{}_{4047}C_{\mathrm{k}}$　を求めよ.

6.　正の実数 x,y,z に対して,
$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\leq k\sqrt{4x+y+z}$　が常に成り立つような k の条件を求めよ.

7.　m,n を自然数とする. $[(5+\sqrt{23})^m]$=23n+1 を満たす最小の m を求めよ.

8.　四面体 $A_0A_1A_2A_3$の内部の任意の位置に存在する点 O について，半直線 A_0O と三角形 $A_1A_2A_3$との交点を $A_{1,2,3}$, A_1O と $A_0A_2A_3$との交点を $A_{0,2,3}$, A_2O と $A_0A_1A_3$の交点を $A_{0,1,3}$とする.そして半直線 $A_1A_{1,2,3}$と辺 A_2A_3との交点を $A_{2,3}$，半直線 $A_0A_{0,1,3}$と辺 A_1A_3との交点を $A_{1,3}$，半直線 $A_2A_{0,2,3}$と辺 A_0A_3との交点を $A_{0,3}$とする.
右図の四面体において,
$\triangle A_{1,2,3}\,A_{2,3}A_2$=5，$\triangle A_{1,2,3}\,A_{1,3}A_1$=7
$\triangle A_{0,1,3}\,A_{0,3}A_0$=15，$\triangle A_{0,2,3}\,A_{0,3}A_0$=9，のとき，
$\triangle A_{0,1,3}\,A_{1,3}A_1$ ：$\triangle A_{0,2,3}\,A_{2,3}A_2$　を求めよ.



9.　k を正の奇数とする．次の条件を満たす N が丁度 5 個存在する k の最小値を求めよ．

（条件）・N は差が 2 の自然数の積で表せる．

・N は差が k の自然数の積で表せる．

10.　x,y を実数とする．

$x^2 - 4xy + 5y^2 - 1 = 0$　が成立するとき，$(x-2y)^{1024} + y^{1024}$ の最小値を求めよ．

11.　$1!\times 2!\times 3!\times \cdots \times (7^{17}-1)!\times 7^{17}!$　のもつ素因数 7 の個数を 17 で割った余りを求めよ．

12.　m , n を自然数として,下の不等式を満たす整数 x_k の組 $(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_m)$ の個数を $f_m(n)$ とする．

$$|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_m| \leq n$$

このとき，$f_m(n) = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \frac{2^p\ {}_q C_r}{s!} \prod_{k=1}^{j} (t) + 1$　と表すことができる．

ただし，$\displaystyle\prod_{k=1}^{j} f(k) = f(1)\times f(2)\times f(3)\times \ldots \times f(j)$ であり総乗記号である．

このとき, p～t に当てはまる, m,n,j,k を用いた文字式を答えよ．

以上計 12 問

<u>作問者担当問題</u>

1. 田﨑 2. 植田 3. 小坂 4. 姉崎 5. 田﨑 6. 山口 7. 姉崎 8. 田﨑 9. 小坂 10. 姉崎 11. 小坂 12. 田﨑

運営担当者及び関係者

３年６組　植田瑞希，　３年９組　田﨑奏楽，　２年９組　姉崎樹 ，小坂唯木

昨年度に引き続き,誰もが楽しめるような湖風祭の企画として,第2回湖風祭コンテストを開催することにしました.前回同様,これらの問題はすべて上記のメンバーで自作したものです.”面白い”問題や様々な視点からの施行を必要とするような”骨のある”問題などたくさんあるので,是非楽しんでください.(特に今回は土日をはさみます！チャンスです！！)

突然ですが,皆さんは作問をしたことはありますか？私は日ごろからよく数学の問題を考えるのですが,作問という行為は学びを深める無限大の可能性を孕んでいると考えています.問題を作るにはその問題の題材となるような解法や知識への理解が必要なだけでなく,矛盾を生じさせないような精密な数学力が求められます.ここまで聞くとそれ程難しいことをやってもむしろ意味がないと思う人もいるかもしれません.しかし実際やってみると,あくまで持論ですが,自然に数学力や論理的思考力が身につき,問題を解く上での多くの視点を得ることができます.

さて,作問への愛を長々と語りましたが,湖風祭コンテストは生徒が作問した問題によって成り立っています.作問に絞ることはありませんが,数学に親しみを持つような同志によって,このようなコンテストがこれからも続いていくことを期待しています.

20902　姉崎樹

解答 Google フォーム