問 1 の解答・解説

500 以下の素数ｐが

$$
\begin{aligned}
{}_{2024}C_{1012}\cdot{}_{10212}C_{506} &= \frac{2024!}{(1012!)^2}\cdot\frac{1012!}{(506!)^2} \\
&= \frac{2024!}{1012!\cdot(506!)^2}
\end{aligned}
$$

を割り切るとする.506!の素因数分解にはｐが 1 個以上出てきて、1012!の素因数分解にはｐが 2 個以上出てくるので、分母にｐは合計 4 個以上出てくる．分子の 2024!にはｐが 5 個以上出てくる必要がある．よって、

$$p \leq \frac{2024}{5} = 404.8$$

である．これより満たす最大の素数は 401 である. 実際、401 は 506!の素因数分解に 1 個、1012!の素因数分解に 2 個、2024!の素因数分解に 5 個現れるので、割り切ることができる.

答え: 401

問 2 の解答・解説

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{2k}{k^4+29k^2+225} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{2k}{(k^2+15)^2-k^2} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{2k}{(k^2-k+15)(k^2+k+15)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k^2-k+15} - \frac{1}{k^2+k+15} \right) \\
&= \frac{1}{1^2-1+15} - \frac{1}{n^2+n+15} \\
&= \frac{1}{15} - \frac{1}{n^2+n+15}
\end{aligned}
$$

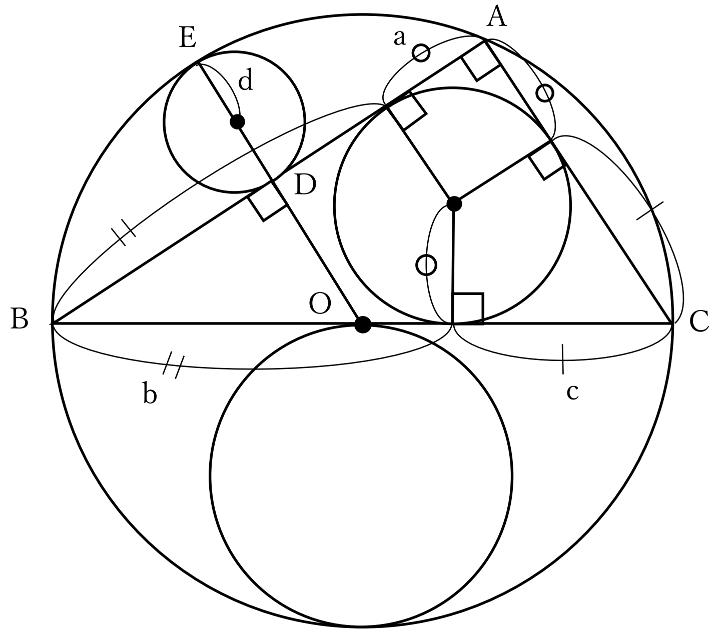
ここで、n=900 を代入し、

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{15} - \frac{1}{900^2+900+15} \\
&= \frac{3604}{54061}
\end{aligned}
$$

答え: $\frac{3604}{54061}$

第４問　解答・解説

下図のように線分の長さを文字でおく.（但し、問題から a=52,d=31 である.）



求める円の半径の長さは、一番大きい円の直径 b＋c の４分の１である.

ここで、b と c を求める. △ABC で、三平方の定理より、

$$(a+b)^2+(a+c)^2=(b+c)^2\cdots①$$

また、△ABC∽△DBO であり、相似比２：１なので、

$$\begin{aligned}
\mathrm{AC} &= 2\mathrm{DO}\\
\mathrm{AC} &= \mathrm{a}+\mathrm{c}\\
\mathrm{DO} &= \mathrm{OE}-2\mathrm{d}\\
&= \mathrm{OB}-2\mathrm{d}\\
&= \frac{b+c}{2}-2\mathrm{d}
\end{aligned}$$

より、

$$\mathrm{a}+\mathrm{c}=\mathrm{b}+\mathrm{c}-4\mathrm{d}\cdots②$$

ここで、$\mathrm{a}=52$,$\mathrm{d}=31$ なので②より、$\mathrm{b}=176$、

これらを①に代入して、$\mathrm{c}=\frac{2964}{31}$を得る

求める半径は、$\frac{b+c}{4}=\frac{2105}{31}$　　　　答え、$\frac{2105}{31}$

第８問　解答・解説

まず、以下のように板の各マスに文字Ａ～Ｆをかく.

A	D	E	E	D	A
D	B	F	F	B	D
E	F	C	C	F	E
E	F	C	C	F	E
D	B	F	F	B	D
A	D	E	E	D	A

同じ文字が書かれたマスは板の回転や裏返しで互いに移りあい．逆に、異なる文字が書かれたマスは板を回転、裏返しさせても互いに移りあわない．したがって、各文字に対し、同じ文字が書かれたマスのうち少なくとも１マスは色を塗られていないといなければならない．書かれた文字は６種類であり、色を塗ることのできるマスは７マスある．塗る７マスのうちにすべての文字のマスが含まれていればいい．

次に、どの 2×2 のマスを赤で塗るかで場合分けする．

(i)　　C,F,B,F を含む 2×2 のマスを赤で塗るとき

A	D	E	E	D	A
D	B	F	F	B	D
E	F	C	C	F	E
E	F	C	C	F	E
D	B	F	F	B	D
A	D	E	E	D	A

赤で塗るマスの選び方は４通り．上図のように塗ったとすると、残りの塗る３マスが A,D,E でなければならない．2×1 の青で塗るマスが A,D のとき、その選び方８通り、1×1 の黄で塗るマスが E のマスで８通り．2×1 の青で塗るマスが D,E のとき、その選び方８通り、1×1 の黄色で塗るマスが A のマスで４通り．

$4(8\times8+8\times4) = 384$(通り)

(ii)　A,D,B,D を含む 2×2 のマスを赤で塗るとき

A	D	E	E	D	A
D	B	F	F	B	D
E	F	C	C	F	E
E	F	C	C	F	E
D	B	F	F	B	D
A	D	E	E	D	A

赤で塗るマスの選び方は 4 通り．上図のように塗ったとすると、残りの塗る 3 マスが C,E,F でなければならない．2×1 の青で塗るマスが C,F のとき、その選び方 8 通り、1×1 の黄で塗るマスが E のマスで 8 通り．2×1 の青で塗るマスが E,F のとき、その選び方 8 通り、1×1 の黄色で塗るマスが C のマスで 4 通り．

$4(8\times 8+8\times 4) = 384$(通り)

(iii)　B,D,E,F を含む 2×2 のマスを赤で塗るとき

A	D	E	E	D	A
D	B	F	F	B	D
E	F	C	C	F	E
E	F	C	C	F	E
D	B	F	F	B	D
A	D	E	E	D	A

赤で塗るマスの選び方は 8 通り．上図のように塗ったとすると、残りの塗る 3 マスのうち 2 マスが A,C でなければならず、残りの 1 マスはどの文字でもいい．2×1 の青で塗るマスが A を含むとき(A,D のとき)、その選び方 7 通り、1×1 の黄で塗るマスが C のマスで 4 通り．2×1 の青で塗るマスが C を含むとき(C,E または C,C のとき)、その選び方 11 通り、1×1 の黄色で塗るマスが A のマスで 4 通り．

$8(7\times 4+11\times 4) = 576$(通り)

(i),(ii),(iii)より、

すべての選び方は、$384+384+576=1344$(通り)

答え、1344 通り

第 10 問　解答・解説

　問題と同様に 1 つずつ分銅を取り除いていき、天秤が釣り合った時には左の皿から 1 つ分銅を取り除いて、操作を続けることにする．このこき、取り除き方の場合の数は、それぞれの皿から取り除く分銅の順番を決める場合の数に等しく、$(8!)^2$通りである．求める場合の数は、これから途中で釣り合う場合を除いたものになる．

　天秤が釣り合うとき、分銅の個数と平均の重さとの積が左右の皿で等しいので、分銅の個数の比の値(1 以上にとる)は、最も重い分銅と最も軽い分銅の重さの比の値 $\frac{368}{325}$ 以下である．分銅の個数の 1 でない最小の比の値は $\frac{8}{7}$ である．これは $\frac{368}{325}$ より大きいので、天秤が釣り合うとき、分銅の個数は等しいことがわかる．

　左の皿にのっている分銅の重さの値はすべて mod6 で 1 と合同であり、右の皿にのっている分銅の重さの値はすべて mod6 で 2 と合同である．天秤が釣り合うとき、左右の皿の分銅の重さの合計が一致しており、左右の皿の分銅の個数は一致していないといけないので、分銅の個数は 6 個ずつだとわかる．

　取り除く 2 つの分銅の選び方を数える．最初、右の皿の分銅の重さの合計は左の皿の分銅の重さの合計より 8 大きいので、右の皿から取り除く 2 つの分銅の重さが左の皿から取り除く 2 つの分銅の重さより 8 重ければいい．

　そのような取り除く 2 つの分銅の選び方を、左右の皿に乗っている分銅の重さはそれぞれ等差数列になっていることに着目して、図 1 のように左の皿の分銅 2 つに対応する右の皿分銅 2 つを選ぶ場合を考えて数える．図 1 において、左の皿で 337 と 349 を選んだ時の右の皿の選び方の場合の数は、異なる数字から出ている同じ色の実線と傍線がつながっている数字の組み合わせと一致する．この時、(344,350)と(338,356)を選ぶ場合、線の選び方が重複していることにも注意する．

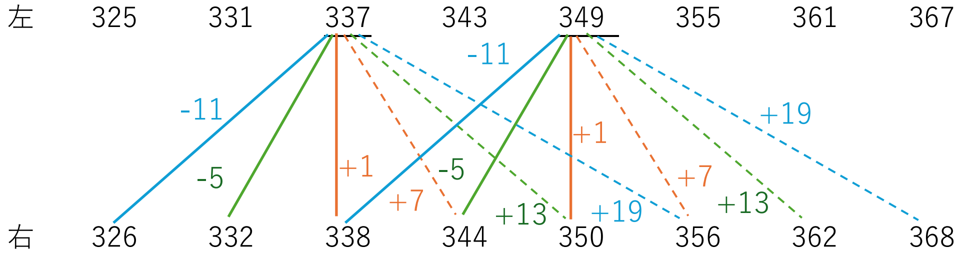


図 1

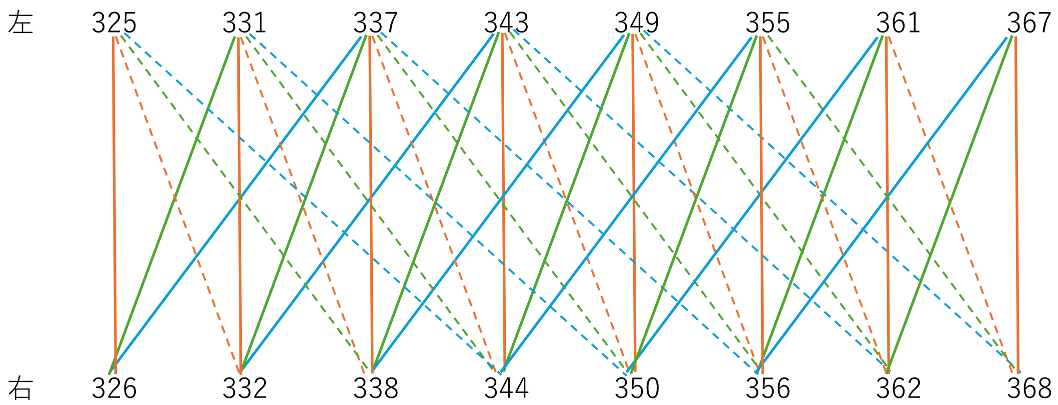


図 2

図 2 で、スタートまたはゴールが同じ数字になる場合とスタートの 2 つとゴールの 2 つが同じになるときの重複を除いた、同じ色の直線 1 つと傍線 1 つの組み合わせの場合の数を数える．赤の直線と傍線の組み合わせは、8×7-14 = 42(通り)．緑の直線と傍線の組み合わせは、7×6-10 = 32(通り)．青の直線と傍線の組み合わせは、6×5-6 = 24(通り).次に、スタートまたはゴールが同じ数字になる場合を数える．赤と緑の時、12 通り．赤と青の時、10 通り．緑と青の時、8 通り．

よって、途中で釣り合う分銅の選び方は、42＋32＋24-(12+10+8)=68（通り）

天秤が 2 回以上釣り合うことはないので、途中で天秤が釣り合うときの場合の数は各天秤釣り合う前後においてそれぞれ決める場合の数に等しく$68 \times (2! \times 6!)^2$（通り)で、求める場合の数は、

$$(8!)^2 - 68 \times (2! \times 6!)^2 = 1{,}484{,}697{,}600 \text{（通り）}$$

第 11 問　解答・解説

図 1 の一筆書きの方法の数は、図 2 の一筆書きの方法の数に一致する.

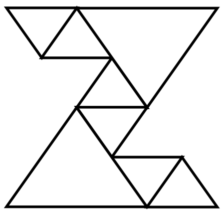


図 1

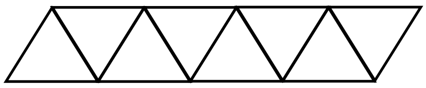


図 2

一般に正三角形 n 個を組み合わせた図 3 の図形を一筆書きで描くことを考える.A,X からは奇数本の線が出ているので、一筆書きの定理により、A,X が始、終点になる.

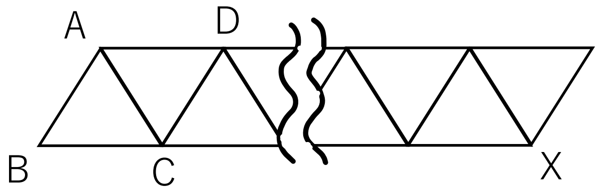
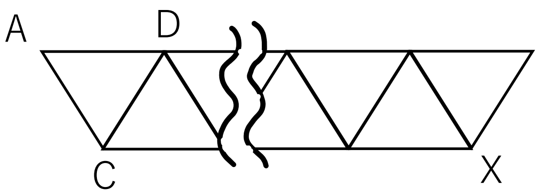


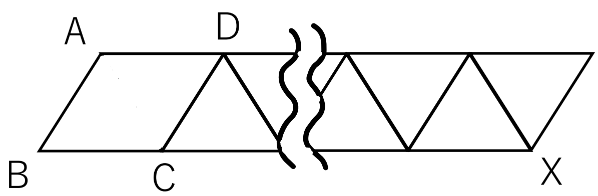
図 3

A が始点、X が終点となる描き方の個数f_hとし、f_hについて漸化式を立てる.X が始点、A が終点となる描き方の個数もf_hである.

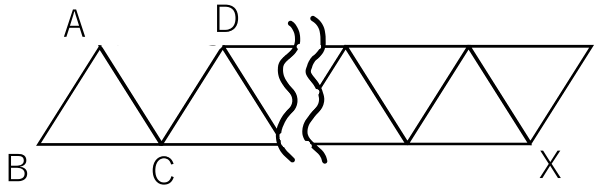
(i)　最初が A→B のときは、辺 AB と辺 BC を除いてできる図形を、C を始点、X を終点として一筆書きする方法の個数に一致し、f_{h-1}通り.



(ii)　最初が A→C のときは、辺 AC を除いてできる図形を、C を始点、X を終点として一筆書きする方法の個数に一致し、f_{h-1}通り.



(iii)　最初が A→D のときは、辺 AB,BC,CA,AD を除いてできる図形を、D を始点、X を終点として一筆書きし、頂点 C に来たときに△ABC を 1 周する方法の個数に一致し、$2f_{h-2}$通り.



(i),(ii),(iii)より、漸化式

$$f_h = 2(f_{h-1} + f_{h-2})$$

を得る.

図 2 のとき、f_8通りなので$f_1 = 2$、$f_2 = 6$から順次計算する.

$$f_8 = 2448$$

答え　2448 通り