第２回湖風祭コンテスト解答解説

湖風祭コンテスト委員会
後援 : ZMC(膳所高校数学研究会)

目次

各種情報等

作問者担当問題

1. 田﨑 2. 植田 3. 小坂 4. 姉崎 5. 田﨑 6. 山口 7. 姉崎 8. 田﨑 9. 小坂 10. 姉崎 11. 小坂 12. 田﨑

運営担当者及び関係者

3 年 6 組　植田瑞希，3 年 9 組　田﨑奏楽，2 年 9 組　姉崎樹 , 小坂唯木

解答提出者合計・・・10 名

平均点・・・4.4 点

〈正答者数と正答率〉

問題番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
正答者数	8	3	5	4	2	4	3	4	1	5	3	2
正答率	80%	30%	50%	40%	20%	40%	30%	40%	80%	50%	30%	20%

この度は第 2 回湖風祭コンテストへのご参加ありがとうございました.至らない点や不備等も多く見られたと思いますが,楽しんでいただけましたでしょうか.私は運営としてほんとに楽しませてもらいました.コンテストは終了しましたが,この問題及び解答は今後も数学オリンピック等の学習にも役立つと思いますのでぜひ活用してください.

問題の方にも載せましたが, 湖風祭コンテストは生徒が作問した問題によって成り立っています.作問に絞ることはありませんが,数学に親しみを持つような同志によって,このようなコンテストがこれからも続いていくことを期待しています.

代表　20902　姉崎樹

解答解説

1. ある自然数 x について, x を 2,3,5,7,11 で割った余りがそれぞれ,1,1,2,3,5 であるとき,
   x としてありうる数のうち最小のものを求めよ.

[解答] 577

[解説]この解説ではより一般化したものを示すが,この(問)を解くのみであれば,下記 p_k, r_k は数値でおいて計算するのでもよい.以下の補題を示す.ただしこれは,「105 減算」を拡張したものである.

(補題)一般に,異なる素数 $p_1, p_2, \ldots p_n$ に対して, $p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_{k-1} \times p_{k+1} \times \ldots p_n$ の倍数でかつ p_k で割った余りが 1 となるような自然数 m_k を, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} m_k \equiv 1 \left(\mathrm{mod} \prod_{i=1}^{n} p_i\right)$ となるものとして定めれば,

すべての自然数 x について, x を p_k で割った余りを r_k とすれば,

$$\sum_{k=1}^{n} m_k r_k \equiv x \left(\mathrm{mod} \prod_{i=1}^{n} p_i\right)$$ がいえる.

(証明) x を p_k で割った時の商を q_k とおくと, すべての k について $x = p_k q_k + r_k$ よって,

$m_k r_k = m_k x - m_k p_k q_k$ ここで, $m_k \equiv 0 \ (\mathrm{mod} \ p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_{k-1} \times p_{k+1} \times \ldots p_n)$ より, $m_k p_k \equiv 0 \left(\mathrm{mod} \prod_{i=1}^{n} p_i\right)$

したがって, $m_k r_k \equiv m_k x \left(\mathrm{mod} \prod_{i=1}^{n} p_i\right)$ 故に、 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} m_k r_k \equiv \sum_{k=1}^{n} m_k x \equiv x \sum_{k=1}^{n} m_k \left(\mathrm{mod} \prod_{i=1}^{n} p_i\right)$

設定より $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} m_k \equiv 1 \left(\mathrm{mod} \prod_{i=1}^{n} p_i\right)$ だから, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} m_k r_k \equiv x \left(\mathrm{mod} \prod_{i=1}^{n} p_i\right)$ (Q.E.D)

これを用いて, $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)$=(2,3,5,7,11) のとき, $(m_1, m_2, m_3, m_4, m_5)$=(1155,1540,1386,330,210) より, 2310 減算でき, x ≡ 1155×1+1540×1+1386×2+330×3+210×5 = 7507 ≡ 577 (mod 2310) だから,求める最小の x は 577 である.

2. 斜辺が 10, 高さが 6 の直角三角形について, これらの数字が 10 進法で表されているので,
   この三角形は存在しない. しかし, n を自然数として, n 進法であれば三角形ができる.
   斜辺が 10(n), 高さが 6(n)となる直角三角形が存在する最小の n を求め, そのときの面積を n 進法で求めよ.

[解答] n=12 (面積)= $30_{(n)}$

[解説] 右図のように外接円を書くと,斜辺はその円の直径になる.

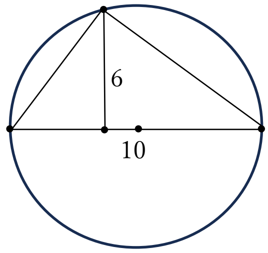
仮に,10 進法のとき,半径は 5 になるから,高さが 6 になることに矛盾.

n 進法のとき, $10_{(n)} = \mathrm{n}$, 半径は $\frac{n}{2}$, 半径が 6 以上であればよいから,

$\frac{n}{2} \geq 6$, $\therefore \mathrm{n} \geq 12$, よって最小の n は 12 である.

$\mathrm{n} \geq 12$ のとき,面積は $n_{(10)} \times 6_{(10)} \times \frac{1}{2} = 3n_{(10)} = 30_{(n)}$ となる. ($\because 3 < \mathrm{n}$)

某入社試験では,さんれい(12 進数以上)と答えれば正解であった.



3. $$\sum_{\mathrm{k}=1}^{100}\left\{\left(\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{k}}\mathrm{i}\right)\left(\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{k}}\mathrm{i}^2\right)\right\}$$ を求めよ.

[解答] 29480890000

[解説] (与式)
$$= \sum_{k=1}^{100}\left\{\frac{1}{2}k(k+1)\left\{\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)\right\}\right.$$

$$= \frac{1}{12}\sum_{k=1}^{100}k^2(k+1)^2(2k+1)$$

$$= \frac{1}{36}\sum_{k=1}^{100}[\{k(k+1)(k+2)\}^2 - \{(k-1)k(k+1)\}^2]$$

$$= \frac{1}{36}[\{(1\times2\times3)^2 - (0\times1\times2)^2\} + \{(2\times3\times4)^2 - (1\times2\times3)^2\} + \cdots$$

$$+ \{(100\times101\times102)^2 - (99\times100\times101)^2\}]$$

$$= \frac{1}{36}\times100^2\times101^2\times102^2$$

$$= 29480890000$$

4. a , b を実数とする. $a^3 + 15a + b^3 + 15b = 5a^2 + 5b^2 + 4ab + 18$ のとき, $a + b$ を求めよ.

[解答] $a + b = 2$, 6

[解説] $a+b=s,\ ab=t,$ とおく.

(与式) $\Leftrightarrow a^3+b^3+15a+15b-5(a^2+b^2)-4ab-18=0$

$\Leftrightarrow (a+b)(a^2-ab+b^2)+15(a+b)-5\{(a+B)^2-2ab\}-4ab-18=0$

$\Leftrightarrow s(s^2-3t)+15s-5(s^2-2t)-4t-18=0$

$\Leftrightarrow s^3-5s^2+(15-3t)s+6t-18=0$

$\Leftrightarrow (s-2)(s^2-3s-3t+9)=0$

$\Leftrightarrow s-2=0,$ または, $s^2-3s-3t+9=0$

$\therefore \mathrm{s}=a+b=2\cdots$ ①

$\mathrm{s}^2-3s-3t+9=0$ を考える. $a+b=s,\ ab=t,$ を戻すと,

$a^2+b^2+2ab-3a-3b-3ab+9=0$

$\Leftrightarrow a^2+b^2-ab-3a-3b+9=0$

$\Leftrightarrow 2a^2+2b^2-2ab-6a-6b+18=0$

$\Leftrightarrow (a-b)^2+a=3)^2+(b=3)^2=0$

$\Leftrightarrow a=b=3$

$\therefore a+b=6\cdots$ ②

よって,①,②から, $a+b=2$, 6 を得る.

5. $$\sum_{k=1}^{2023}(-1)^k(4047+2\mathrm{k})\,{}_{4047}\mathrm{C}_{\mathrm{k}}$$ を求めよ.

[解答] $-4047-8094\,{}_{4046}C_{2023}$

[解説] ${}_nC_k={}_{n-1}C_{k-1}+{}_{n-1}C_k$ と $\mathrm{k}\,{}_nC_k=\mathrm{n}\,{}_{n-1}C_{k-1}$ を用いる.

(与式) $=4047\sum_{k=1}^{2023}(-1)^k\left({}_{4046}C_{k-1}+{}_{4046}C_k\right)+2\times4047\sum_{k=1}^{2023}(-1)^k\,{}_{4046}C_{k-1}$

$$=4047\{-\left({}_{4046}C_0+{}_{4046}C_1\right)+\left({}_{4046}C_1+{}_{4046}C_2\right)-\cdots+\left({}_{4046}C_{2021}+{}_{4046}C_{2022}\right)$$

$$-\left({}_{4046}C_{2022}+{}_{4046}C_{2023}\right)\}-8094\sum_{k=0}^{2022}(-1)^k\,{}_{4046}C_k$$

$=4047\left(-{}_{4046}C_0-{}_{4046}C_{2023}\right)-8094\times\dfrac{(1-1)^{4046}+{}_{4046}C_{2023}}{2}$ ($\because$ 二項定理)

$=-4047-8094\,{}_{4046}C_{2023}$

6.　正の実数 x,y,z に対して，

$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} \leq k\sqrt{4x+y+z}$ が常に成り立つような k の条件を求めよ．

[解答] $k \geq \frac{3}{2}$

[解説] $\vec{v}=(\sqrt{4x},\sqrt{y},\sqrt{z})$　，　$\vec{u}=\left(\frac{1}{\sqrt{4}},1,1\right)$，とおくと，

（与式）⇔ $\vec{v}\cdot\vec{u} \leq k|\vec{v}|$，このとき，$\vec{v}\cdot\vec{u}=|\vec{v}||\vec{u}|\cos\theta$，より，$|\vec{u}|\cos\theta \leq k$

$|\vec{u}|=\sqrt{\frac{2\times4+1}{4}}=\frac{3}{2}$，$-1 \leq \cos\theta \leq 1$ なので，これが常に成り立つ k は，$k \geq \frac{3}{2}$ である．

7.　m,n を自然数とする．$[(5+\sqrt{23})^m]$=23n+1 を満たす最小の m を求めよ．

[解答] m=22

[解説]（与式）⇔ $[(5+\sqrt{23})^m] \equiv 1 \pmod{23}$ となる最小の m を求める．

$(5+\sqrt{23})^m = {}_mC_0\times5^m + {}_mC_1\times5^{m-1}\times\sqrt{23}\ +\cdots+ {}_mC_{m-1}\times5\times\sqrt{23}^{m-1} + {}_mC_m\times\sqrt{23}^m$（∵ 二項定理）

よって，無理数になる項を消すことを考える．

$(5-\sqrt{23})^m = {}_mC_0\times5^m + {}_mC_1\times5^{m-1}\times(-\sqrt{23}) +\cdots+ {}_mC_{m-1}\times5\times(-\sqrt{23})^{m-1} + {}_mC_m\times(-\sqrt{23})^m$ となり，

$(5+\sqrt{23})^m+(5-\sqrt{23})^m \cdots$（☆）は m の偶奇によらず，

$m=2k\ (k\in\mathrm{N})$ のとき，$(☆)=2({}_mC_0\times5^m + {}_mC_2\times5^{m-2}\times23\ +\cdots+ {}_mC_{m-2}\times5^2\times23^{\frac{m-2}{2}} + {}_mC_m\times23^{\frac{m}{2}})$

$m=2k-1\ (k\in\mathrm{N})$ のとき，$(☆)=2({}_mC_0\times5^m + {}_mC_2\times5^{m-2}\times23\ +\cdots+ {}_mC_{m-3}\times5^3\times23^{\frac{m-3}{2}} + {}_mC_{m-1}\times5\times23^{\frac{m-1}{2}})$

のように，$(☆)\in\mathrm{N}$ となる．

このとき，$0<5-\sqrt{23}<1$，$0<(5-\sqrt{23})^m<1$ であるため，

$(5+\sqrt{23})^m+(5-\sqrt{23})^m-1=[(5+\sqrt{23})^m]$ とできる．（∵（☆）$\in\mathrm{N}$）

故に，$[(5+\sqrt{23})^m] \equiv (5+\sqrt{23})^m+(5-\sqrt{23})^m-1 \equiv 2({}_mC_m\times5^m+{}_mC_2\times5^{m-2}\times23\ \ldots) \equiv 2\times5^m-1 \pmod{23}$

より，$2\times5^m-1\equiv1 \pmod{23}$ を満たす最小の m を求めればよい．

$2\times5^m-1\equiv1 \pmod{23} \Leftrightarrow 2\times5^m\equiv2 \pmod{23} \Leftrightarrow 5^m\equiv1 \pmod{23}$（∵ $2\perp23$）

よって，Fermat の小定理より，m=22 は解の一つである．

ここで以下の補題を示す．

（補題）$a^x\equiv1 \pmod{m}$ となるような $x\in\mathrm{N}$ の最小値 d を $\mathrm{ord_m}(a)$ で表すとき，$x\in\mathrm{N}$ が，$a^x\equiv1 \pmod{m}$ を満たすことと，x が $\mathrm{ord_m}(a)$ の倍数であることは同値である．

様々な示し方が考えられるためエレガントな一例を紹介する.

(証明) $\mathrm{d} = \mathrm{ord}_{\mathrm{m}}(a)$ とおく. $a^x \equiv 1 \pmod{\mathrm{m}}$ を満たす任意の x に対し,

$a^{\gcd(x,d)} \equiv 1 \pmod{\mathrm{m}}$ となり, $\gcd(\mathrm{x,d}) \leq \mathrm{d}$ と d の最小性から, $\gcd(\mathrm{x,d}) = \mathrm{d}$ が成立.

故に,d は x を割り切る. (Q.E.D)

よって, $5^m \equiv 1 \pmod{23}$ を満たす最小の m は,1 , 2 , 11 , 22, のいずれかである.

m=1 のとき, $5^m \equiv 5 \pmod{23}$ より不適. m=2 のとき, $5^m \equiv 25 \equiv 2 \pmod{23}$ より不適.

m=11 のとき, $5^m \equiv 25^5 \times 5 \equiv 2^5 \times 5 \equiv 45 \equiv 22 \pmod{23}$ より不適.

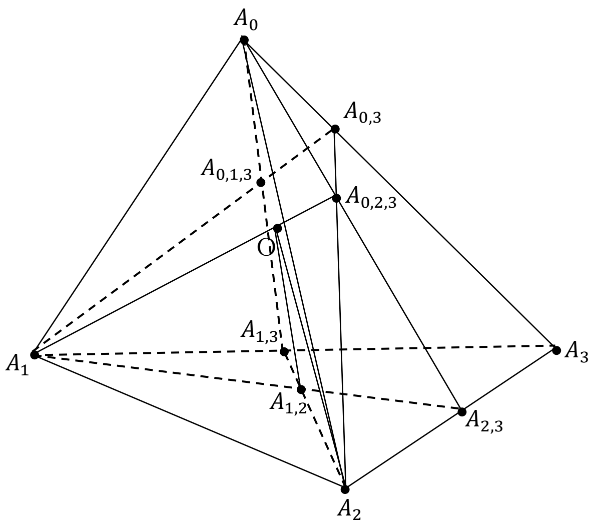
故に求める m の最小値は 22 である.

8. 四面体 $A_0A_1A_2A_3$の内部の任意の位置に存在する点 O について, 半直線 A_0O と三角形 $A_1A_2A_3$との交点を $A_{1,2,3}$, A_1O と $A_0A_2A_3$との交点を $A_{0,2,3}$, A_2O と $A_0A_1A_3$の交点を $A_{0,1,3}$とする.そして半直線 $A_1A_{1,2,3}$と辺 A_2A_3との交点を $A_{2,3}$, 半直線 $A_0A_{0,1,3}$と辺 A_1A_3との交点を $A_{1,3}$, 半直線 $A_2A_{0,2,3}$と辺 A_0A_3との交点を $A_{0,3}$とする.

下図の四面体において,

$\triangle A_{1,2,3}\ A_{2,3}A_2=5$, $\triangle A_{1,2,3}\ A_{1,3}A_1=7$, $\triangle A_{0,1,3}\ A_{0,3}A_0=15$, $\triangle A_{0,2,3}\ A_{0,3}A_0=9$, のとき ,

$\triangle A_{0,1,3}\ A_{1,3}A_1 : \triangle A_{0,2,3}\ A_{2,3}A_2$ を求めよ.



[解答] 7 : 3

[解説]$s(D_0D_1D_2)$で, 三角形$D_0D_1D_2$の面積を表すこととする. 以降, 次式が成り立つことを示している.

$$\boldsymbol{\frac{s(A_{1,2,3}A_{2,3}A_2)}{s(A_{1,2,3}A_{1,3}A_1)}\frac{s(A_{0,1,3}A_{1,3}A_1)}{s(A_{0,1,3}A_{0,3}A_0)}\frac{s(A_{0,2,3}A_{0,3}A_0)}{s(A_{0,2,3}A_{2,3}A_2)}=1}$$

(証明)

対頂角で$\angle A_2A_{1,2,3}A_{2,3} = \angle A_1A_{1,2,3}A_{1,3}$より

$$\frac{s(A_{1,2,3}A_{2,3}A_2)}{s(A_{1,2,3}A_{1,3}A_1)}=\frac{A_{1,2,3}A_{2,3}}{A_{1,2,3}A_1}\frac{A_{1,2,3}A_2}{A_{1,2,3}A_{1,3}}$$

同様に$\angle A_1A_{0,1,3}A_{1,3} = \angle A_0A_{0,1,3}A_{0,3}$より

$$\frac{s(A_{0,1,3}A_{1,3}A_1)}{s(A_{0,1,3}A_{0,3}A_0)}=\frac{A_{0,1,3}A_{1,3}}{A_{0,1,3}A_0}\frac{A_{0,1,3}A_1}{A_{0,1,3}A_{0,3}}$$

$\angle A_0A_{0,2,3}A_{0,3} = \angle A_2A_{0,2,3}A_{2,3}$より

$$\frac{s(A_{0,2,3}A_{0,3}A_0)}{s(A_{0,2,3}A_{2,3}A_2)}=\frac{A_{0,2,3}A_{0,3}}{A_{0,2,3}A_2}\frac{A_{0,2,3}A_0}{A_{0,2,3}A_{2,3}}$$

よって

$$\frac{s(A_{1,2,3}A_{2,3}A_2)}{s(A_{1,2,3}A_{1,3}A_1)}\frac{s(A_{0,1,3}A_{1,3}A_1)}{s(A_{0,1,3}A_{0,3}A_0)}\frac{s(A_{0,2,3}A_{0,3}A_0)}{s(A_{0,2,3}A_{2,3}A_2)}$$

$$=\frac{A_{1,2,3}A_{2,3}}{A_{1,2,3}A_1}\frac{A_{1,2,3}A_2}{A_{1,2,3}A_{1,3}}\frac{A_{0,1,3}A_{1,3}}{A_{0,1,3}A_0}\frac{A_{0,1,3}A_1}{A_{0,1,3}A_{0,3}}\frac{A_{0,2,3}A_{0,3}}{A_{0,2,3}A_2}\frac{A_{0,2,3}A_0}{A_{0,2,3}A_{2,3}}$$

$$=\frac{A_{1,2,3}A_{2,3}}{A_{1,2,3}A_1}\frac{A_{0,2,3}A_0}{A_{0,2,3}A_{2,3}}\times\frac{A_{1,2,3}A_2}{A_{1,2,3}A_{1,3}}\frac{A_{0,1,3}A_{1,3}}{A_{0,1,3}A_0}\times\frac{A_{0,1,3}A_1}{A_{0,1,3}A_{0,3}}\frac{A_{0,2,3}A_{0,3}}{A_{0,2,3}A_2}$$

次に半直線$A_{2,3}O$と辺A_0A_1との交点を$A_{0,1}$, 半直線$A_{1,3}O$と辺A_0A_2との交点を$A_{0,2}$, 半直線$A_{0,3}O$と辺A_1A_2との交点を$A_{1,2}$としたとき, Ceva の定理より

三角形$A_0A_1A_{2,3}$において$\dfrac{A_{1,2,3}A_{2,3}}{A_{1,2,3}A_1}\dfrac{A_{0,2,3}A_0}{A_{0,2,3}A_{2,3}}\dfrac{A_1A_{0,1}}{A_{0,1}A_0}=1$

三角形$A_0A_2A_{1,3}$において$\dfrac{A_{1,2,3}A_2}{A_{1,2,3}A_{1,3}}\dfrac{A_{0,1,3}A_{1,3}}{A_{0,1,3}A_0}\dfrac{A_0A_{0,2}}{A_{0,2}A_2}=1$

三角形$A_1A_2A_{0,3}$において$\dfrac{A_{0,1,3}A_1}{A_{0,1,3}A_{0,3}}\dfrac{A_{0,2,3}A_{0,3}}{A_{0,2,3}A_2}\dfrac{A_2A_{1,2}}{A_{1,2}A_1}=1$

さらに辺$A_2A_{0,1}$, $A_1A_{0,2}$, $A_0A_{1,2}$の交点は, 半直線A_3Oと三角形$A_0A_1A_2$との交点に一意に定まるから, 三角形$A_0A_1A_2$で Ceva の定理より

$$\frac{A_{0,1}A_0}{A_1A_{0,1}}\times\frac{A_{0,2}A_2}{A_0A_{0,2}}\times\frac{A_{1,2}A_1}{A_2A_{1,2}}=1$$

以上により,

$$\frac{A_{1,2,3}A_{2,3}}{A_{1,2,3}A_1}\frac{A_{0,2,3}A_0}{A_{0,2,3}A_{2,3}}\times\frac{A_{1,2,3}A_2}{A_{1,2,3}A_{1,3}}\frac{A_{0,1,3}A_{1,3}}{A_{0,1,3}A_0}\times\frac{A_{0,1,3}A_1}{A_{0,1,3}A_{0,3}}\frac{A_{0,2,3}A_{0,3}}{A_{0,2,3}A_2}$$

$$=\frac{A_{0,1}A_0}{A_1A_{0,1}}\times\frac{A_{0,2}A_2}{A_0A_{0,2}}\times\frac{A_{1,2}A_1}{A_2A_{1,2}}$$

$$=1$$

すなわちここに Ceva の定理の三次元拡張

$$\frac{s(A_{1,2,3}A_{2,3}A_2)}{s(A_{1,2,3}A_{1,3}A_1)}\frac{s(A_{0,1,3}A_{1,3}A_1)}{s(A_{0,1,3}A_{0,3}A_0)}\frac{s(A_{0,2,3}A_{0,3}A_0)}{s(A_{0,2,3}A_{2,3}A_2)}=1$$

が示された.

(証明終)

今$s(A_{1,2,3}A_{2,3}A_2)=5,\ s(A_{1,2,3}A_{1,3}A_1)=7,\ s(A_{0,1,3}A_{0,3}A_0)=15,\ s(A_{0,2,3}A_{0,3}A_0)=9$だから代入して

$$\frac{5}{7}\times\frac{s(A_{0,1,3}A_{1,3}A_1)}{15}\times\frac{9}{s(A_{0,2,3}A_{2,3}A_2)}=1$$

$$\therefore\ s(A_{0,1,3}A_{1,3}A_1):s(A_{0,2,3}A_{2,3}A_2)=\mathbf{7:3}$$

[補足]

立体(3 次元)における Ceva の定理である. これは作問者(田崎)たちの研究の一部だが, Ceva の定理のm次元一般化には成功できなかった. もし成功した方がいらしたら, ぜひ教えていただきたい.

9. k を正の奇数とする. 次の条件を満たす N が丁度 5 個存在する k の最小値を求めよ.

(条件)・N は差が 2 の自然数の積で表せる.

・N は差が k の自然数の積で表せる.

[解答] 23

[解説] N = (m-1)(m+1) = n(n+k) (m,n ∈ N,m > 1) とおく.

$m^2-1=n^2+\mathrm{kn}$

$4m^2-4=4n^2+4\mathrm{kn}$

$4m^2-4=(2\mathrm{n}+\mathrm{k})^2-k^2$

$(2\mathrm{n}+2\mathrm{m}+\mathrm{k})(2\mathrm{n}-2\mathrm{m}+\mathrm{k})=\mathrm{k}^2-4$

k=1 のとき, N は 5 つ存在しない. よって以下, k ≥ 3 で考える.

k は奇数であるから,（右辺）≡ 1 (mod 4) である.

ここで, AB =（右辺）となる整数 A,B を考えると, A≡B≡ ±1 (mod 4）である.

つまり, A,B は A−B が 4 の倍数となるような奇数である.

この[条件]の下で, A = 2n+2m+k, B = 2n-2m+k となるような (m,n) の組が存在する A,B の必要十分条件を求める. このとき, A−B = 4m となるので, 4 の倍数であり A,B は奇数であるので, [条件]は常に満たされる.

N > 0 より, m > 1 であるから, A−B > 4 であればよい.

また k ≥ 3 より, $k^2-4>0$ であり, A > 0 より, B > 0 である.

さらに, N > 0 となるような n は n < −k でもあり得るように思えるが, これは B > 0 に反する.

以上より, (m,n) が存在するには A,B > 0 かつ A−B > 4 が必要で, 逆にこのとき (m,n) は存在する.

A−B = 4 となる場合は, A = k+2, B = k-2 とすれば存在する.

A−B = 0 , すなわち, $k^2-4=A^2$ となる場合は存在しない.

この場合も含めて, (m,n) の組が 6 つ存在する, つまり (A,B) の組が 6 つ存在すれば, N は 5 つ存在する.

すなわち, k^2-4 の正の約数が 12 個存在する k を求めればよい.

$k^2-4=(k+2)(k-2)$ であり, k+2 , k-2 は互いに素であることから, 考察すると, k としてありうる最小の値は 23

---

10. x,y を実数とする.

$x^2-4xy+5y^2-1=0$ が成立するとき, $(x-2y)^{1024}+y^{1024}$ の最小値を求めよ.

[解答] 2^{-511}

[解説] (与式) ⇔ $(x-2y)^2+y^2=1 \Leftrightarrow \cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ ($\cos\theta=x-2y$, $\sin\theta=y$) ⋯ ①

①から求める最小値は, $\cos^{2^{10}}\theta+\sin^{2^{10}}\theta$ の最小値と同値である.

以下,より一般化された $\cos^{2^n}\theta+\sin^{2^n}\theta$ $(n\in N)$ の場合の最小値を n で表す.

Cauchy–Schwarz の不等式より,

$$\cos^{2^n}\theta+\sin^{2^n}\theta \ \geq\ \frac{1}{2}(\cos^{2^{n-1}}\theta+\sin^{2^{n-1}}\theta)^2$$

等号成立は, $\theta=\frac{\pi}{4}+\frac{k-1}{2}\pi$ ($k\in N$) とでき, 同様の評価を行うと,

$$\begin{aligned}\cos^{2^n}\theta+\sin^{2^n}\theta &\geq \frac{1}{2}(\cos^{2^{n-1}}\theta+\sin^{2^{n-1}}\theta)^2\\ &\geq \frac{1}{2}\{\frac{1}{2}\left(\cos^{2^{n-2}}\theta+\sin^{2^{n-2}}\theta\right)^2\}^2\\ &= \frac{1}{2}\times\frac{1}{2^2}\times\left(\cos^{2^{n-2}}\theta+\sin^{2^{n-2}}\theta\right)^4\\ &\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

$\geq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^2} \times \frac{1}{2^4} \times \cdots \times \frac{1}{2^{2^{n-2}}} \times (\cos^2\theta + \sin^2\theta)$

$= 2^{-(1+2+2^2+\cdots+2^{n-2})}$

$= 2^{1-2^{n-1}}$　　　（∵　等号成立は $\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{k-1}{2}\pi$（$k \in \mathrm{N}$）で一定）

よって, $n = 10$ を代入し,最小値 2^{-511} を得る.

11.　$1! \times 2! \times 3! \times \cdots \times (7^{17}-1)! \times 7^{17}!$ のもつ素因数 7 の個数を 17 で割った余りを求めよ.

[解答] 13

[解説] 自然数 N を 7 で割り,その商をさらに 7 で割り…という操作を繰り返すことを考える.

右図において, N!の素因数の個数 $a_N = q_1 + q_2 + \cdots + q_n$

N を 7 進法で表したときの各位の和 $b_N = r_1 + r_2 + \cdots + r_n + q_n$

$$\begin{array}{l} 7\,)\,\underline{N} \ \cdots\ r_1 \\ 7\,)\,\underline{q_1} \ \cdots\ r_2 \\ 7\,)\,\underline{q_2} \ \cdots\ r_3 \\ \quad\vdots \\ 7\,)\,\underline{q_{n-1}} \ \cdots\ r_n \\ \quad q_n \end{array}$$

また, $\mathrm{N} = 7q_1 + r_1 = 6q_1 + r_1 + (7q_2 + r_2)$

$= 6(q_1 + r_1) + (r_1 + r_2) + (7q_3 + r_3)$

$= \cdots\cdots$

$= 6(q_1 + q_2 + \cdots + q_n) + (r_1 + r_2 + \cdots + r_n + q_n)$

$= 6a_N + b_N$

よって, $a_N = \frac{1}{6}(\mathrm{N} - \mathrm{b_N})$

つまり求めたいものは,

$$\sum_{k=1}^{7^{17}} a_k = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{7^{17}} (k - b_k) = \frac{1}{12} \times 7^{17} \times (7^{17} + 1) - \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{7^{17}} b_k$$

$1 \leq k \leq 7^{17} - 1$ として,k を 7 進法で表したとき,これは 17 桁以下の自然数を表す.

0〜6 までの数は均等に出現するので,

$$\sum_{k=1}^{7^{17}-1} b_k = (0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) \times (7^{17} - 1) \times 17 \times \frac{1}{7} = 17 \times 3 \times (7^{17} - 1)$$

また, $b_{7^{17}} = 1$ だから,

$$\sum_{k=1}^{7^{17}} a_k = \frac{1}{12} \times 7^{17} \times (7^{17} + 1) - \frac{1}{6} \times \{17 \times 3 \times (7^{17} - 1) + 1\}$$

$$= \frac{1}{6}\{7^{17} \times \frac{7^{17}+1}{2} - 17 \times 3 \times (7^{17} - 1) - 1\}$$

$7^{17}+1 \equiv 7+1 \equiv 8\ (mod\ 17)$

2 と 7 は互いに素より, $\frac{7^{17}+1}{2} \equiv 4\ (mod\ 17)$

よって, $7^{17} \times \frac{7^{17}+1}{2} - 17 \times 3 \times (7^{17}-1) - 1 \equiv 7 \times 4 - 1 \equiv 10\ \ (mod\ 17)$

2 と 17 は互いに素より, $\frac{1}{2}\left\{7^{17} \times \frac{7^{17}+1}{2} - 17 \times 3 \times (7^{17}-1) - 1\right\} \equiv 5 \equiv 39\ \ (mod\ 17)$

3 と 17 は互いに素より, $\frac{1}{6}\left\{7^{17} \times \frac{7^{17}+1}{2} - 17 \times 3 \times (7^{17}-1) - 1\right\} \equiv 13\ \ (mod\ 17)$

よって,求める余りは 13

12. m , n を自然数として,下の不等式を満たす整数 x_k の組 $(x_1,x_2,x_3,\ldots,xm)$ の個数を $fm(n)$ とする.

$|x_1|+|x_2|+\ \cdots\ +|x_m| \leq n$

このとき, $f_m(n) = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \frac{2^{p}\ {}_{q}C_{r}}{s!} \prod_{k=1}^{j}(t) + 1$ と表すことができる.

ただし, $\displaystyle\prod_{k=1}^{j} f(k) = f(1) \times f(2) \times f(3) \times \ \ldots \times f(j)$ であり総乗記号である.

このとき, p〜t に当てはまる, m,n,j,k を用いた文字式を答えよ.

[解答] $(p,q,r,s,t) = (j,m,j(\text{または}m-j),j,n-k+1)$

[解説] $f_m(n)$の漸化式を立てることを考える. そこで$f_{m+1}(n)$を全てここに書き表す.

$x_{m+1}=0$のとき, $|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_m|+0 \leq n$より, この組$(x_1,x_2,\ldots,x_{m+1})$の個数は$f_m(n)$

$x_{m+1}=\pm1$のとき, $|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_m|+1 \leq n$より, この個数は$f_m(n-1)$

$x_{m+1}=\pm2$のとき, $|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_m|+2 \leq n$より, この個数は$f_m(n-2)$

$\vdots$

$x_{m+1}=\pm(n-1)$のとき, $|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_m|+(n-1) \leq n$より, この個数は$f_m(1)$

$x_{m+1}=\pm n$のとき, $|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_m|+n \leq n$より, この個数は$f_m(0)$

以上によって$f_{m+1}(n) = 2\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f_m(k) + f_m(n)$ $\cdots(\star)$ が m ≥ 1 で成り立つことが言える.

ここで少し実験をする. ただし総和をとる途中経過は工夫して差分(後述)を用いるとよい.

$f_1(n) = 2n+1$

$f_2(n) = 2(n-1)n + 2n + (2n+1) = \frac{2^2(n-1)n}{2!} + 2 \cdot \frac{2n}{1!} + 1$

$$f_3(n)=\frac{2^3(n-2)(n-1)n}{3!}+(2^3+2^2)\frac{(n-1)n}{2!}+(2+2^2)n+1$$

$$=\frac{2^3(n-2)(n-1)n}{3!}+3\cdot\frac{2^2(n-1)n}{2!}+3\cdot\frac{2n}{1!}+1$$

$$f_4(n)=\frac{2^4(n-3)(n-2)(n-1)n}{4!}+4\cdot\frac{2^3(n-2)(n-1)n}{3!}+6\cdot\frac{2^2(n-1)n}{2!}+4\cdot\frac{2n}{1!}+1$$

$$f_5(n)=\frac{2^5(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n}{4!}+5\cdot\frac{2^4(n-3)(n-2)(n-1)n}{4!}+10\cdot\frac{2^3(n-2)(n-1)n}{3!}+10$$

$$\cdot\frac{2^2(n-1)n}{2!}+5\cdot\frac{2n}{1!}+1$$

以上より, 次の予想が立つ.

$$f_m(n)=\frac{2^m{}_m\mathrm{C}_m}{m!}\prod_{k=1}^{m}(n-k+1)+\frac{2^{m-1}{}_m\mathrm{C}_{m-1}}{m-1!}\prod_{k=1}^{m-1}(n-k+1)+\cdots+\frac{2^1{}_m\mathrm{C}_1}{1!}\prod_{k=1}^{1}(n-k+1)+1$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\left\{\frac{2^j{}_m\mathrm{C}_j}{j!}\prod_{k=1}^{j}(n-k+1)\right\}+1 \qquad \cdots(*)$$

これを数学的帰納法で示す.

(証明)

(Ⅰ) $m=1$のとき, $f_m(n)=2n+1$であり,

$$\sum_{j=1}^{m}\left\{\frac{2^j{}_m\mathrm{C}_j}{j!}\prod_{k=1}^{j}(n-k+1)\right\}+1=2n+1$$

であるから, $(*)$は成立.

(Ⅱ) $m=\alpha$における$(*)$の成立を仮定する. このとき$(\star)$の漸化式と$(*)$より

$$f_{\alpha+1}(n)$$

$$=2\sum_{l=0}^{n-1}f_\alpha(l)+f_\alpha(n)$$

$$=2\sum_{l=0}^{n-1}\left\{\sum_{j=1}^{\alpha}\frac{2^j{}_\alpha\mathrm{C}_j}{j!}\prod_{k=1}^{j}(l-k+1)+1\right\}+\sum_{j=1}^{\alpha}\frac{2^j{}_\alpha\mathrm{C}_j}{j!}\prod_{k=1}^{j}(n-k+1)+1$$

$$=2\sum_{l=0}^{n-1}\Delta\left\{\sum_{j=1}^{\alpha}\frac{2^j{}_\alpha\mathrm{C}_j}{(j+1)!}\prod_{k=1}^{j+1}(l-k+1)+l\right\}+\sum_{j=1}^{\alpha}\frac{2^j{}_\alpha\mathrm{C}_j}{j!}\prod_{k=1}^{j}(n-k+1)+1$$

$$=2\left[\left\{\sum_{j=1}^{\alpha}\frac{2^j{}_\alpha\mathrm{C}_j}{(j+1)!}\prod_{k=1}^{j+1}(n-k+1)+n\right\}-\left\{\sum_{j=1}^{\alpha}\frac{2^j{}_\alpha\mathrm{C}_j}{(j+1)!}\prod_{k=1}^{j+1}(0-k+1)+0\right\}\right]+\sum_{j=1}^{\alpha}\frac{2^j{}_\alpha\mathrm{C}_j}{j!}\prod_{k=1}^{j}(n-k+1)+1$$

$$=\sum_{j=2}^{\alpha+1}\frac{2^j{}_{\alpha}\mathrm{C}_{j-1}}{j!}\prod_{k=1}^{j}(n-k+1)+2n-2\cdot 0+\sum_{j=1}^{\alpha}\frac{2^j{}_{\alpha}\mathrm{C}_j}{j!}\prod_{k=1}^{j}(n-k+1)+1$$

$$=\sum_{j=2}^{\alpha}\left\{\frac{2^j\left({}_{\alpha}\mathrm{C}_{j-1}+{}_{\alpha}\mathrm{C}_j\right)}{j!}\prod_{k=1}^{j}(n-k+1)\right\}+\frac{2^{\alpha+1}{}_{\alpha}\mathrm{C}_{\alpha+1-1}}{(\alpha+1)!}\prod_{k=1}^{\alpha+1}(n-k+1)+\frac{2^1{}_{\alpha}\mathrm{C}_1}{1!}\prod_{k=1}^{1}(n-k+1)+2n+1$$

$$=\sum_{j=2}^{\alpha}\left\{\frac{2^j{}_{\alpha+1}\mathrm{C}_j}{j!}\prod_{k=1}^{j}(n-k+1)\right\}+\frac{2^{\alpha+1}{}_{\alpha+1}\mathrm{C}_{\alpha+1}}{(\alpha+1)!}\prod_{k=1}^{\alpha+1}(n-k+1)+\frac{2^1{}_{\alpha+1}\mathrm{C}_1}{1!}\prod_{k=1}^{1}(n-k+1)+1$$

$$=\sum_{j=1}^{\alpha+1}\left\{\frac{2^j{}_{\alpha+1}\mathrm{C}_j}{j!}\prod_{k=1}^{j}(n-k+1)\right\}+1$$

$$\left(\text{ただし差分}\Delta f(l)=f(l+1)-f(l)\text{は,}\sum_{l=x}^{y}\Delta f(l)=f(y+1)-f(x)\text{が}y\geq x\text{にて成立する.}\right)$$

よって$m=\alpha+1$における$(*)$の成立がいえる.

(Ⅰ),(Ⅱ)より数学的帰納法で$f_m(n)=\sum_{j=1}^{m}\left\{\frac{2^j{}_m\mathrm{C}_j}{j!}\prod_{k=1}^{j}(n-k+1)\right\}+1$ が示された.■

以上より, $(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{r},\boldsymbol{s},\boldsymbol{t})=(\boldsymbol{j},\boldsymbol{m},\boldsymbol{j},\boldsymbol{j},\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k}+\mathbf{1})$

[補足]

この問題は単なる煩雑な計算問題のようにも見える.

しかし, この着想はもっと別な所から来ている.

$|x|+|y|\leq n$における$f_2(n)$は, 点$(\pm n,0),(0,\pm n)$を結んだ正方形の内部及び周上の格子点の個数に当たる.

$|x|+|y|+|z|\leq n$における$f_3(n)$は, 点$(\pm n,0,0),(0,\pm n,0),(0,0,\pm n)$を結んだ正八面体の内部及び表面上の格子点の個数に当たる.

では次元を増やそう. 座標軸が$x_1,x_2,\dots,x_m$となっている状態をm次元(ユークリッド空間)と呼ぶ. この状態において, 点$(\pm n,0,0,\dots,0),(0,\pm n,0,\dots,0),(0,0,\pm n,\dots,0),\dots,(0,0,0,\dots,\pm n)$を結んでできる図形(正軸体と呼ばれ, β_mと書く)の内部及び境界上にある格子点の個数, それこそが$f_m(n)$なのである.

ちなみに作問者(田﨑)は研究中にこれを発見し(日時は1月1日の朝1時頃. 嘘ではありません, 証拠もあります！), この感動を共有したく, 問題とした.